8.5.26 α) $Q_n = 6{,}4 e^{-10^5 \ln 2 \cdot t}$ (μC) $\longrightarrow 0{,}8 = 6{,}4 e^{-10^5 \ln 2 \cdot 10T}$ ή

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = e^{-10^5 \ln 2 \cdot 10T}$ ή $-3\ln 2 = -10^5 \ln 2 \cdot 10 \cdot T$ ή $T = 3 \cdot 10^{-6}$ s ή $T = 3\mu s$

β) $\frac{E_{10}}{E_0} = \left(\frac{Q_{10}}{Q_0}\right)^2 = \left(\frac{0{,}8}{6{,}4}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64} = 0{,}015625$ ποσοστό 1,5625%

γ) $Q_{30} = 6{,}4 e^{-10^5 \ln 2 \cdot 30T} = 6{,}4 \left(e^{-10^5 \ln 2 \cdot 10T}\right)^3 = 6{,}4 \left(\frac{1}{8}\right)^3 \longrightarrow Q_{30} = 0{,}0125 \mu C$

δ) $Q_{θερμ} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{(6{,}4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 4{,}096 \cdot 10^{-6}} \longrightarrow Q_{θερμ} = 5 \cdot 10^{-6}$ J

9. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

9.5.4 (Λ, Σ, Λ, Λ) 9.5.5 Α-γ, Β-γ 9.5.6 (Λ, Λ, Σ, Λ)
9.5.7 (Λ, Λ, Λ, Σ) 9.5.8 (Σ, Σ, Λ, Λ) 9.5.9 (Λ, Λ, Λ, Σ)
9.5.10 (Λ, Λ, Σ, Σ)

9.5.11 Σωστή η πρόταση Δ. Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ασκούνται

- Οι συντηρητικές δυνάμεις που συνιστούν τη δύναμη επαναφοράς. $F_{επ} = -Dx$
- Οι αποσβέσεις $F_{απ} = -bv$
- Η εξωτερική περιοδική δύναμη $F_{εξ} = F_0 συν(ωt)$

Όλες αυτές έχουν συνισταμένη $ΣF = -Dx - bv + F_0 συν(ωt)$

9.5.12 Α. (1→δ), (3→α), (4→β)

Β. $D = 100 N/m = m\omega_0^2 \longrightarrow \omega_0 = \sqrt{D/m}$ ή $\omega_0 = 10$ rad/s

Γ. – (β) $T > T_0$

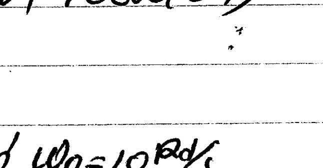
Δ. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12}$ ή $T = \frac{\pi}{6}$ s

Ε. $\omega = \omega_0$ ή $2\pi f = 10$ ή $f = \frac{5}{\pi}$ Hz

9.5.13 α) $\omega = 20\pi$ rad/s ή $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi}$ ή $T = 0{,}1$ s

β) $\omega = 20\pi$ ή $2\pi f = 20\pi$ ή $f = 10$ Hz

Σωστή η πρόταση Β.2 (βλ. διάγραμμα)



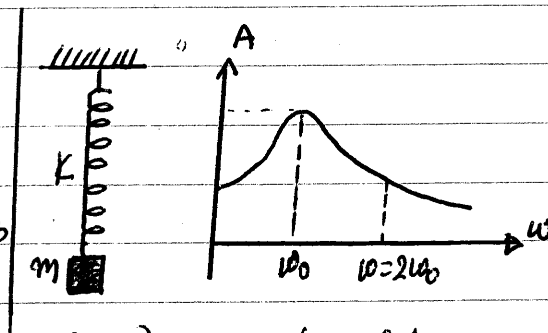
9.5.14 $D=k=m\omega_0^2$ ή $\omega_0=10\,rad/s$ ... $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ ή $T_0=\frac{\pi}{5}\,s$

A.) $T=T_0$ ή $T=\pi/5\,s$

B.) Για $k'>k=200\,N/m \rightsquigarrow \omega_0'=\sqrt{\frac{k'}{m}}>10\,rad/s$. Για να έχουμε συντονισμό πρέπει η ω της εξωτερικής περιοδικής δύναμης να αυξηθεί ώστε $\omega=\omega_0'>10\,rad/s$ ... δηλαδή η περίοδος αυτής να μειωθεί.

Σωστή η πρόταση B.2

9.5.15 ιδιοπερίοδος $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ και κυκλική ιδιοσυχνότητα $\omega_0=\sqrt{k/m}$. Κυκλική συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\sqrt{\frac{k}{m}}=2\omega_0$



Αν η περίοδος T αυξηθεί η ω μειώνεται άρα το πλάτος (βλ. $A=f(\omega)$) αρχικά αυξάνεται και μετά μειώνεται

Σωστή η πρόταση (δ).

9.5.16. Οι ιδιοπερίοδοι των τριών μαζών είναι

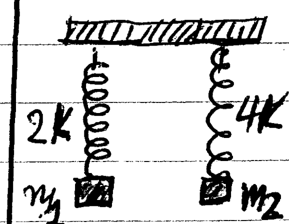
1η μάζα: $T_{01}=2\pi\sqrt{m/k}=\pi\sqrt{\frac{4m}{k}}$, 2η μάζα: $T_{02}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}=\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

3η μάζα: $T_{03}=2\pi\sqrt{\frac{6m}{3k}}=\pi\sqrt{\frac{8m}{k}}$. Παρατηρούμε ότι $T=T_{03}$ άρα το μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης έχει η μάζα 6m (σωστή δ) αφού είναι συντονισμένο.

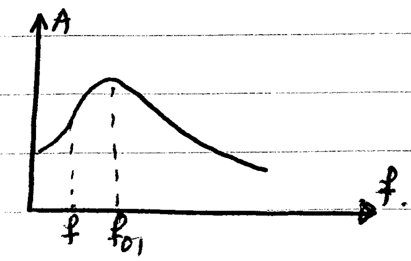
9.5.17.- A) Προφανώς $f=f_{02} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m_2}} \Rightarrow$

άρα $m_2= \; m_1$

Σωστή η πρόταση (δ)



B) $f_{01}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m_1}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}\sqrt{2}=f\cdot\sqrt{2}$ ή $f=\frac{f_{01}}{\sqrt{2}}<f_{01}$



Αν η περίοδος T της σανίδας μειωθεί η συχνότητα αυτής αυξάνεται οπότε το πλάτος αυξάνεται και μετά μειώνεται

Σωστή η πρόταση (δ).

9.5.18. Προφανώς μεγιστοποιείται το μέγεθος που είναι συμφασικό με την εξωτερική περιοδική δύναμη $F=F_0συν(ωt)$
$x=Aημ(ωt)$, $υ=ωAσυν(ωt)$, $α=-ω^2Aημ(ωt)$, ... άρα μεγιστοποιείται η ταχύτητα. Σωστή η πρόταση (β)

9.5.19 $F=F_0συν(ωt)$ (1), $x=Aημ(ωt) \to υ=\frac{dx}{dt}=ωAσυν(ωt)$ (2)
Από τις (1), (2) παρατηρούμε ότι F, $υ$ συμφασικά.

9.5.20 Α(Λ,Σ,Λ) . Β) Φαίνεται εύκολα από διάγραμμα συντονισμού

9.5.21. $I_{01}=\frac{V_0}{R_1}$, $I_{02}=\frac{V_0}{R_2}$ επειδή $R_1>R_2 \to I_{01}<I_{02}$. Μεγαλύτερη ενέργεια μαγνητικού πεδίου $U_{B,max}=\frac{1}{2}LI_0^2$ αποθηκεύεται προφανώς στο πηνίο του κυκλώματος R_2 επειδή σ' αυτό έχουμε το μέγιστο πλάτος έντασης ρεύματος. Σωστή η πρόταση (B)

9.5.22 Λ, Λ, Λ, Σ

9.5.23 α) $ω=\frac{2π}{T}=\frac{2π}{0,25π}=8\,rad/s$ $\quad ψ=0,2ημ(8t)$ και $υ=1,6συν(8t)$ (SI)
β) $T_0=2π\sqrt{m/D}=2π\sqrt{2/200}=0,2π\,s$, $ΔT=0,20π-0,25π=-0,05π$
$\frac{ΔT}{T}=\frac{-0,05π}{0,25π}=-0,2$ ποσοστό -20%, μείωση 20%
γ) $A_0=0,2m=20cm$ και $T=2s$, $A=A_0e^{-Λt}$ ή $1,25=20e^{-Λ2} \to$
$2^{-4}=e^{-Λ\cdot 2}$ ή $4ln2=2Λ$ ή $Λ=2ln2\ s^{-1}$ άρα $A=0,2\cdot e^{-2ln2\,t}$ (S.I)

9.5.24 α) $D=mω_0^2$ ή $K=mω_0^2$ ή $ω_0=10π\,rad/s$, $ω_{διεγέρτη}=\frac{ω}{8}=20π\,rad/s$
Επειδή $ω_δ \neq ω_0$ το σύστημα δεν είναι συντονισμένο
β) $ω_0'=20π$ ή $\sqrt{K/m'}=20π$ ή $m'=\frac{K}{400π^2}=\frac{50π^2}{400π^2}$ ή $m'=0,125kg$
γ) Στην κατάσταση του συντονισμού και μόνο τότε ισχύει
$F_{απόσβεσης}=F_{εξωτερική}$ ή $bυ=8συν(20πt)$ ή $4υ=8συν(20πt)$ ή
ή $υ=2συν(20πt)$

9.5.25. α) $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{12\pi}=\frac{1}{6}s$ β) $\upsilon_0=\omega A=12\pi\cdot 0,2$ ή $\upsilon_0=2,4\pi\ m/s$

β) $\omega_0=\sqrt{k/m}=10\pi\ rad/s$, $\Delta\omega=10\pi-12\pi=-2\pi\ rad/s$

$\Delta\omega=2\pi\Delta f$ ή $\Delta f=-1Hz$ άρα $\Delta f=-1Hz$

9.5.26. $m=1kg$ $F=20συν(10t)(SI)$, $x=0,2ημ(10t)$ (SI)

α) $\omega_0=\sqrt{k/m}$ ή $k=m\omega_0^2$ (1). Επειδή έχουμε συντονισμό

$\omega_0=\omega_{διεγ}=10\ rad/s \xrightarrow{(1)} k=100N/m$

β) Στην κατάσταση συντονισμού ισχύει $F_{απ}=-F$ ή

$-b\cdot\upsilon=-20συν(10t)$ ή $b\cdot 2συν(10t)=20συν(10t)$ ή

ή $b=10kg\,s^{-1}$

γ) $\upsilon_{0,max}=\omega A$ ή $\upsilon_{0,max}=10\cdot 0,2$ ή $\upsilon_{0max}=2m/s$

... $\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm 10\sqrt{0,2^2-0,12^2}$ ή $\upsilon=\pm 1,6\ m/s$

δ) $F=F_0συν(10t)$ ή $F_0/2=F_0συν(10t)$ ή $συν(10t)=\frac{1}{2}$ (1)

$\upsilon=\frac{dx}{dt}\Rightarrow \upsilon=2συν(10t) \xrightarrow{(1)} \upsilon=2\frac{1}{2}$ ή $\upsilon=1\ m/s$.

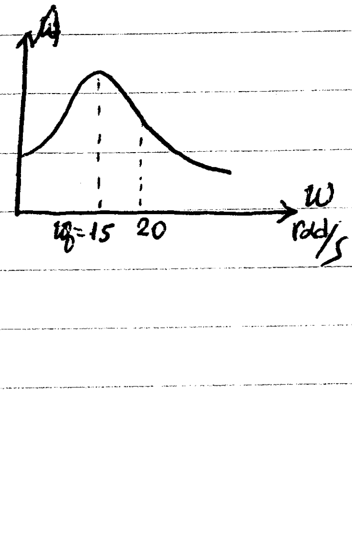
ε) $P_{προσ}=\frac{dE_{προσ}}{dt}=\frac{dW_F}{dt}=\frac{F\cdot dx}{dt}=F\cdot\upsilon$ ή $P_{προσ}=20συν(10t)\cdot 2συν(10t)$

ή $P_{προσ}=40συν^2(10t)=40συν^2(10\frac{\pi}{30})=40\frac{1}{4}=10J/s$

9.5.27 α) $\frac{dE}{dt}=\frac{|dW_{απ}|}{dt}=\frac{|F_{απ}\cdot dx|}{dt}=b\upsilon^2$.

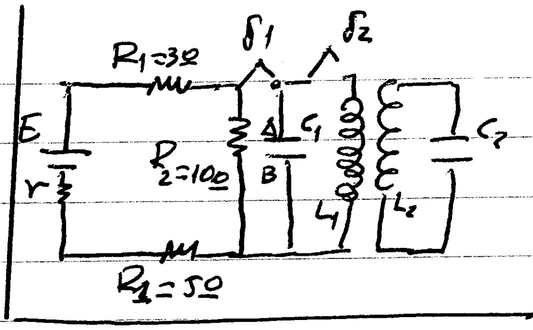
$\upsilon=\frac{dx}{dt}$ ή $\upsilon=2συν(20t)$ $\Rightarrow \frac{dE}{dt}=16συν^2(20t)\xrightarrow{t=T/6}$

$\Rightarrow \frac{dE}{dt}=16συν^2(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{6})=16\frac{1}{4}$ ή $\frac{dE}{dt}=4J/s$



β) Αν η περίοδος Τ της εξωτερικής περιοδικής δύναμης αυξηθεί η κυκλική συχνότητα ω μειώνεται κάτω από 20 rad/s

- Όταν $15<\omega\le 20$ rad/s, το Α αυξάνεται
- Όταν $\omega=15$ rad/s A_{max}
- Όταν $\omega<15$ rad/s το Α μειώνεται.



9.5.28 A) $I_0=\frac{E}{R_{ολ}}=\frac{20V}{20Ω}=1A$

$V_C=I_0R_2=10V$

$Q_0=C_1V_C=20\mu C$

B) $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}}=5\cdot10^3\ rad/s$, $I=\omega_0Q_0=0{,}1A$

$q=Q_0\,συν(\omega_0 t)$ ή $q=2\cdot10^{-5}συν(5\cdot10^3t)$ (S.I)

$i=-0{,}1\,ημ(5\cdot10^3t)$ (S.I)

Γ) $i=\pm\omega\sqrt{Q_0^2-q^2}=\pm5\cdot10^3\sqrt{(20\cdot10^{-6})^2-(-12\cdot10^{-6})^2} \Longrightarrow i=\pm0{,}08A$

α) $\frac{dV_C}{dt}=\dots=\frac{i}{C}=\frac{\pm0{,}08}{2\cdot10^{-6}}$ ή $\frac{dV_C}{dt}=\pm4\cdot10^4\ V/s$

β) $dU_B/dt=-\frac{dU_E}{dt}=-V_C\cdot i=-\frac{q}{C}\cdot i=-\frac{-12\cdot10^{-6}}{2\cdot10^{-6}}\cdot(\pm8\cdot10^{-2})$ ή $\frac{dU_B}{dt}=\pm0{,}48\ J/s$

Δ) $\sqrt{\frac{1}{L_2C_2}}=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}}$ ή $L_2C_2=L_1C_1$ ή $C_2=\frac{L_1C_1}{L_2}$ ή $C_2=2\mu F\cdot\frac{2\cdot10^{-2}H}{10^{-2}H}$ ή $C_2=4\mu F$.

9.5.29. A) $D=100\frac{N}{m}=m\omega_0^2$ ή $\omega_0=10\ rad/s$

$A=A_0e^{-\Lambda t}$ ή $2{,}5=10e^{-\Lambda\cdot1}$ ή $2^{-2}=e^{-\Lambda}$ ή $\Lambda=2\ln2$ ή $\Lambda=1{,}4\ s^{-1}$

άρα $A=0{,}10e^{-2\ln2\,t}$ ή $A=0{,}10e^{-1{,}4t}$ (S.I)

B) ... συντονισμό) ... $x=0{,}1\,ημ(\omega_0t)$ ή $x=0{,}1\,ημ(10t)$

και $v=1\,συν(10t)$.

$F_{αποσβέσεως}=F_{αν}=-bv=-2m\Lambda\cdot v$ ή $F_{αν}=-2\cdot1\cdot1{,}4\cdot v$ ή $F_{αν}=-2{,}8v$

ή $F_{αν}=-2{,}8\cdot συν(10t)$ και επειδή $F=-F_{αν} \Rightarrow \underline{F=2{,}8\,συν(10t)}$

9.5.30. A.1) $v_0=\omega A$ ή $\omega=\frac{2m/s}{0{,}2m}$ ή $\omega=10\ rad/s$

$E=\pi\cdot b\omega A^2=\pi\cdot0{,}8\cdot10\cdot0{,}2^2$ ή $E=1{,}0048J$ (βλ. 9.5.2)

A.2) $\bar{P}=\frac{E}{T}=\frac{\pi\cdot b\omega A^2}{2\pi/\omega}=\frac{1}{2}b\omega^2A^2=\frac{1}{2}b(\omega A)^2=\frac{1}{2}bv_0^2$ ή $\bar{P}=1{,}6\ J/s$

B) $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}\Rightarrow v=\pm10\sqrt{0{,}2^2-0{,}16^2}$ ή $v=\pm1{,}2\ m/s$

$\frac{dE_{θ}}{dt}=bv^2=0{,}8\cdot(1{,}2)^2=1{,}152\ J/s$ (βλ. 9.5.2)

Γ) Αν $F=F_0\,ημ(\omega t)$ και $x=A\,ημ(\omega t)$ τότε $v=\omega A\,συν(\omega t)$

ή $v=v_0ημ(ωt+\pi/2)$ ή $v=v_0ημ(ωt+\varphi_0)$ με $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$

Αν όμως ήταν $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ η σχέση ισχύς $\overline{P}=\frac{1}{2}\frac{F_0^2}{b}συν^2\varphi$ (άσκ. 9.5.31) θα ήταν $\overline{P}=0$ άτοπο διότι έχουμε απόσβεση και αποτελέσματα εντελώς διαφορετικά από τα αποτελέσματα της Α-Ζ.

9.5.31 $F=10ημ(10\pi t)$, $F=-0{,}4v$ (SI) άρα $F_0=10N$, $b=4 kg/s$ και $ω=10\pi\, rad/s$. ... $x=Aημ(10\pi t-\frac{\pi}{6})$, $v=v_0συν(10\pi t-\frac{\pi}{6})$ ή $v=v_0ημ(10\pi t+\frac{\pi}{3})$ ή $v=v_0ημ(\cdots t+\varphi)$ / $\varphi=\pi/3$, $ω=10\ rad/s$

Η στιγμιαία προσφερόμενη ισχύς είναι

$P=F\cdot v=F_0ημ(ωt)\cdot v_0ημ(ωt+\varphi)$ ή ... $P=\frac{F_0v_0}{2}\left(συν\varphi-συν(2ωt+\varphi)\right)$

και η μέση ανά περίοδο ισχύς $\overline{P}=\frac{1}{2}F_0v_0συν\varphi$ (1)

Επίσης $\overline{P}=\frac{W_{F(T)}}{T}=\frac{W_{αντ(T)}}{T}=\frac{\pi bωA^2}{2\pi/ω}$ ή $\overline{P}=\frac{1}{2}bω^2A^2$ ή $\overline{P}=\frac{1}{2}bv_0^2$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow$ $F_0v_0συν\varphi=bv_0^2$ ή $v_0=\frac{F_0συν\varphi}{b}$ (3)

και $\overline{P}=\frac{1}{2}b\frac{F_0^2συν^2\varphi}{b^2}$ ή $\overline{P}=\frac{F_0^2συν^2\varphi}{2b}$ (4)

α) $\overline{P}=\frac{1}{2}\frac{10^2}{0{,}4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 W$ ή $\overline{P}=31{,}25W$

β) $v_0=\frac{F_0συν\varphi}{b}=\frac{10\cdot 1/2}{0{,}4}$ ή $v_0=12{,}5\ m/s$, $v_0=ωA$ ή $A=\frac{12{,}5}{10\pi}\simeq 0{,}398m$

$x=0{,}398ημ(10\pi t-\frac{\pi}{6})$ και $v=12{,}5συν(10\pi t-\pi/6)$ ή

$v=12{,}5ημ(10\pi t+\frac{\pi}{3})$